

APRENDER

INOVAR



DIVULGAR

COLABORAR

Título

DICA: Divulgar, Inovar, Colaborar, Aprender – 2023

Direção

Domingos Fernandes, Presidente do Conselho Nacional de Educação

Coordenação

Domingos Fernandes
Aldina Lobo

Organização

Adélia Lopes
Aldina Lobo
Ana Sérgio
Fernanda Candeias

Apoio à coordenação

Cristina Brandão
Rita Vinhas

Apoio administrativo e financeiro

Paula Barros

Expedição

Ana Estribio

Autores

Vários
Os textos, incluindo imagens, são da responsabilidade dos autores, não refletindo necessariamente a posição ou orientação do CNE.

Editor

Conselho Nacional de Educação (CNE)

Design gráfico

Providência Design

Impressão

Greca – Artes Gráficas

Tiragem

500 exemplares

1.ª Edição

dezembro de 2023

ISSN

2975-9951

Depósito legal

526051/23

Agradecimentos

O Conselho Nacional de Educação

agradece a todos quantos deram o seu contributo para a presente publicação, a título individual ou institucional, designadamente:

aos biografados Alcina Mendes, Sónia Pereira, Olga Antunes, Carlos Louro e respetivos participantes. A saber, diretores, ex-diretores, equipas de direção, professores, alunos, funcionários, encarregados de educação e familiares;

ao Agrupamento de Escolas de Cister e à Escola Secundária Henrique Medina, em particular às equipas de direção, ao pessoal docente e não docente, aos alunos, encarregados de educação, coordenadores das estruturas de gestão intermédia e presidentes dos conselhos gerais;

aos presidentes, comissários ou coordenadores do Plano Nacional de Leitura (PNL), da Rede de Bibliotecas Escolares (RBE), do Plano Nacional das Artes (PNA), da Associação Portuguesa de Educação Musical (APEM), da Associação Portuguesa de Educação em Ciências (APEduC), da Associação Cantar Mais (ACM), da Associação Nacional de Professores de Educação Visual e Tecnológica (APEVT), do Nuclio – Núcleo Interactivo de Astronomia (NUCLIO) e da Associação Ludus.

A todos agradece-se o compromisso, o empenho e o diálogo mantidos com o CNE, nas diferentes etapas do processo, o que permitiu chegar à primeira publicação do projeto *DICA: Divulgar, Inovar, Colaborar, Aprender – 2023*.

VIVÊNCIAS DICA

Projeto 10 minutos a ler

Alessandra Oliveira, Mônica Rebocho e Regina Duarte (PNL)

(Re)pensar a leitura em família a partir da biblioteca escolar

Lúcia Barros e Carla Gandra (RBE)

Literacias como disciplina de oferta complementar

Carla Pires e Raquel Ramos (RBE)

O Clube de Teatro como Laboratório de Inovação Pedagógica

Nazaré Álvares e Joana Félix (PNA)

Focus group - sala de aula, um olhar adolescente

Maria Emanuel Albergaria (PNA)

Dar voz à música no 1.º ciclo - uma Oficina Coral

Manuela Encarnação (APEM)

Práticas inovadoras na área das ciências

Mônica Baptista, Sílvia Ferreira, Marisa Correia e José Contente (APEduC)

Música no coração da escola - Músicas & Musicais

Carlos Gomes (ACM)

As potencialidades dos insetos nos ecossistemas, uma experiência de inovação pedagógica

Isabel Lucas e Sandra de Freitas (APEVT)

Campanhas de pesquisa de asteroides: aprender ciência fazendo ciência

Álvaro Folhas, Ana Costa e Rosa Doran (NUCLIO)

O Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos

Carlota Brasileiro, Dores Ferreira e Jorge Silva (Ludus)



O CAMPEONATO NACIONAL DE JOGOS MATEMÁTICOS

CARLOTA BRAZILEIRO
DORES FERREIRA
JORGE SILVA
ASSOCIAÇÃO LUDUS

O Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, atividade anual implementada em 2004, leva mais de 100 000 alunos, do 1.º ciclo ao 12.º ano, à prática de jogos matemáticos de tabuleiro. Assim promovemos, na comunidade escolar, o desenvolvimento do pensamento rigoroso e criativo, próprio da atividade matemática.

Palavras-chave

Jogos matemáticos;
jogos abstratos

The National Championship of Mathematical Games, an annual activity implemented in 2004, brings more than 100,000 pre-university students to play mathematical board games. In this way, we promote the development of rigorous and creative thinking in the school community, which is typical of the mathematical activity.

Keywords

Mathematical games;
abstract games

Introdução

O Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos (CNJM) realiza-se anualmente, desde 2004. A sua organização é um trabalho conjunto da Associação de Professores de Matemática, da Sociedade Portuguesa de Matemática, da Ciência Viva e da Associação Ludus. Participam neste torneio escolas do ensino básico e secundário de todo o país. O número de jogadores ultrapassa os 100 000, o que faz do CNJM o maior evento da vida académica portuguesa. Este campeonato utiliza jogos de tabuleiro - esclareceremos quais e a razão pela qual lhes chamamos matemáticos. Defenderemos também a prática destes jogos, por os considerarmos instrumentos muito aptos a promover a capacidade de pensar com rigor e criatividade, induzindo também uma atitude positiva face às dificuldades de aprendizagem. Esta competição tornou-se inclusiva na sua 5.^a Edição, em 2008/2009, na Covilhã, onde participaram pela primeira vez jogadores cegos e com baixa visão.

O Jogo

Em *Homo Ludens*, (ver Huizinga, 1955), Johan Huizinga define o jogo como o núcleo das sociedades florescentes. Identifica algumas características do jogo: é livre, não é a vida “normal” ou “real”, cria ordem, não está ligado a nenhum interesse material. Huizinga ilustra a onnipresença do jogo em muitos domínios: linguagem, direito, guerra, conhecimento, poesia, mito, filosofia, arte, ... Como ele sublinha, *a civilização é, nas suas primeiras fases, um jogo. Não sai do jogo como um bebé que se separa do ventre materno: surge no jogo e como jogo, e nunca o deixa.*

A obra de Huizinga, dos anos 40 do século passado, é um momento fundador para os estudos culturais do jogo e da brincadeira. As suas definições e alcance estão datados, mas a viagem que iniciou continua, pois os mistérios do jogo estão longe de terem sido esclarecidos. Caillois (1967), mais tarde, introduziu uma classificação dos jogos que nos ajuda a diferenciar as muitas atividades humanas que se enquadram na palavra “jogo”, desde as atividades inocentes das crianças até aos jogos dos adultos, caracterizados por regras rígidas, como o futebol ou o xadrez. As categorias *Ilinx* (vertigem), *Alea* (acaso), *Agon* (competição) e *Mimicry* (simulação), tingidas por uma mistura das cores *paidia* (caos)/*ludus* (ordem) ajudam-nos a organizar o nosso pensamento sobre este maravilhoso campo de investigação.

Um bom jogo de tabuleiro deve ter uma elevada interação

É claro que nem mesmo as palavras de Caillois são definitivas. A aparentemente simples tarefa de definir jogo e brincadeira está ainda por realizar. Atualmente,

a definição dada pelo filósofo Suits (ver Suits, 1955) é bem vista por muitos especialistas: *Um jogo é a tentativa voluntária de ultrapassar obstáculos desnecessários.* Esta formulação enfatiza o facto de, por exemplo em futebol, seria mais fácil marcar golo transportando a bola com as mãos, mas tal viola as regras. No xadrez, destruir o Rei adversário seria simples se o pudéssemos simplesmente derrubar para fora do tabuleiro, mas tal seria ilegal.

A humanidade joga desde sempre, mas nunca vimos clarificada a razão que subjaz a este aspeto do comportamento humano. A prática de jogos traz, na nossa opinião, muitas vantagens, nomeadamente a nível intelectual, emocional e social. Como matemáticos e amantes de jogos, desenvolvemos em Portugal uma atividade que passamos a descrever.

¹ <https://mathworld.wolfram.com/Baguenaudier.html>

² https://en.wikipedia.org/wiki/Conway%27s_Game_of_Life

³ [https://en.wikipedia.org/wiki/Hex_\(board_game\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Hex_(board_game)).

Consideramos apenas jogos para dois jogadores. Existem bons jogos para qualquer número de jogadores, mas a coleção de jogos interessantes para dois jogadores é extremamente rica. É claro que podemos encontrar *puzzles* matemáticos muito sofisticados, como o Baguenaudier¹, que consideramos como jogos para um jogador. O Jogo da Vida², de John Conway, é considerado um dos jogos mais interessantes para... zero jogadores.

Usamos jogos de tabuleiro abstratos, também conhecidos como jogos de tabuleiro matemáticos. Os nossos jogos não têm tema. Um exemplo de um jogo de tabuleiro abstrato é o xadrez.

A presença de reis, bispos, cavalos, etc. não tem qualquer consequência, é um acidente histórico. Quando foi introduzido na Europa pelos árabes, as peças do xadrez não representavam nada em particular, o que é coerente com a religião muçulmana. A representação particular das peças não tem qualquer influência na prática do jogo. O xadrez pode sempre ser jogado na cabeça, utilizando coordenadas para as células do tabuleiro, é uma atividade puramente mental. O Rei, como diz David Wells, é a peça com os movimentos do Rei, pouco interessa se se trata de uma peça de madeira ou de vidro. No xadrez não existe informação oculta, típica dos jogos de cartas. Nos nossos jogos também não. Ambos os jogadores conhecem, em qualquer momento, a situação completa do jogo - a posição e a vez de cada um. Em todos os nossos jogos, tal como no xadrez, o vencedor é o jogador que comete menos erros. A sorte não desempenha qualquer papel nas decisões das jogadas. Não utilizamos dados ou qualquer outro dispositivo de aleatoriedade.

Há alguns jogos muito bons, muito intelectuais, que devemos pôr de lado se quisermos obedecer aos critérios mencionados. O *bridge* e o gamão, por exemplo.

Os textos que contêm as informações necessárias aos vários jogos, como as regras, devem ser curtos e fáceis de apreender. Isto é típico da época em que vivemos. Milhares de jogos abstratos são inventados e partilhados na *Internet* dia após dia. Para sobreviverem, para chamarem a atenção do público, as suas regras têm de ser breves e apelativas. O xadrez, se fosse inventado agora, provavelmente não teria um futuro feliz... Como exemplo de um conjunto de regras adequado, pensemos no Hex³. Pode descrever-se em poucas linhas este jogo, que, no entanto, é muito elegante e estrategicamente complexo.

Um bom jogo de tabuleiro deve ter uma elevada *interação*. Os movimentos de cada jogador devem depender das ações do adversário. Um jogo sem interação é apenas uma corrida dupla.

Os nossos jogos devem ser *profundos*. Quanto mais níveis de sofisticação um jogo permitir, mais profundo ele é. Exemplos extremos: O Jogo do Galo é superficial (se conhecer o jogo, nunca perderá), o Go é muito profundo (existem muitos níveis diferentes de competência de jogo). Se um jogo tiver uma profundidade significativa, os jogadores mais fortes vencerão consistentemente os adversários mais fracos. Todos tentarão melhorar a sua qualidade de jogo, haverá sempre novos desafios. É por esta razão que vemos pessoas que são membros ativos de clubes de xadrez. Um jogador, profissional ou amador, pode jogar jogos interessantes ao longo de toda a sua vida.

Preferimos jogos *claros*. De acordo com Thompson (Thompson, 2000), estes são os jogos em que não é necessário ser um perito para construir as suas próprias ideias acerca de uma posição - por exemplo, detetar jogadas fortes e fracas. Bentley (Bentley 2023) sugere um conceito diferente, mas relacionado: *Especiosidade*. Um jogo é especioso se os jogadores conseguirem facilmente

Acreditamos que a prática de jogos de tabuleiro abstractos conduz a um melhor desempenho cognitivo dos jovens jogadores

Por razões de organização, os nossos jogos têm uma duração razoável e terminam com a vitória de um dos jogadores. Não há empates

eleger possíveis boas jogadas, sendo que as verdadeiras boas jogadas são difíceis de encontrar. O Xadrez e o Hex pontuam bem neste parâmetro, enquanto o Linhas de Acção⁴ e o Rithmomachia⁵ são muito obscuros: ao praticar estes dois jogos, as ideias, boas ou más, são difíceis de surgir.

Queremos que os nossos jogos sejam *dramáticos*. Dizemos que um determinado jogo é dramático se na sua prática pudermos encontrar volte-faces, falhanços e coisas do género. Os problemas de xadrez que encontramos nos jornais comuns ilustram esta característica do xadrez. Em muitas dessas posições, um dos lados, mesmo com menos material, pode vencer o seu adversário através de um brilhantismo inesperado.

No entanto, os nossos jogos devem ter a qualidade da *decisão*. Com isto queremos dizer que, se um jogador obtém uma vantagem substancial, a vitória deve ser uma tarefa fácil. Por exemplo, utilizando mais uma vez o xadrez como exemplo, na maioria das situações, a vantagem de uma Rainha deve ser suficiente para permitir uma vitória fácil. Esta característica torna possível planear objetivos parciais, que um jogador competente sabe construir para atingir a vitória final.

Por razões de organização, os nossos jogos têm uma duração razoável e terminam com a vitória de um dos jogadores. Não há empates.

É conveniente que os conjuntos de jogos estejam facilmente disponíveis para os jogadores. A maior parte dos nossos jogos pode ser praticada com lápis e papel. Os alunos das escolas também têm sido muito criativos, construindo os seus próprios jogos a partir de material reciclado.

Devemos jogar!

Acreditamos que a prática de jogos de tabuleiro abstractos conduz a um melhor desempenho cognitivo dos jovens jogadores. Trata-se de uma afirmação ousada, que não está perto de ser provada cientificamente. Existe literatura abundante sobre a influência da prática do xadrez na vida académica dos jovens estudantes (Foley, 2020). Os seus resultados não são claros, embora o entusiasmo de alguns autores seja inegável.

Por outro lado, tem sido sugerido que os jogos abstractos e a matemática estão profundamente ligados. Mais uma vez, remetemos para as referências bibliográficas, pois não existe um consenso absoluto sobre este assunto.

No entanto, o senso comum leva-nos a crer que os nossos jogos ajudam os jovens a concentrar-se (devem observar cuidadosamente as posições), a visualizar (devem prever uma sequência de jogadas), a pensar no futuro (pensam antes de agir), a ponderar opções (tentam fazer as melhores jogadas), a pensar abstratamente (os jogadores desenvolvem a capacidade de classificar posições, argumentar por analogia, encontrar semelhanças em posições de diferentes jogos, desenvolver táticas, etc.), a comunicar com rigor (analisam posições e resolvem problemas em conjunto).

Modus operandi

Começamos por escolher os jogos. Definimos quatro grupos etários e seleccionamos três jogos para cada um. Nas primeiras quatro edições do Campeonato, as escolhas foram as seguintes:

⁴ https://en.wikipedia.org/wiki/Lines_of_Action

⁵ <https://en.wikipedia.org/wiki/Rithmomachia>

Idade	CNJM1	CNJM2	CNJM3	CNJM4
6-10	Pontos & Quadrados Poliedros Ouri	Pontos & Quadrados Semáforo Ouri	Pontos & Quadrados Semáforo Ouri	Pontos & Quadrados Semáforo Ouri
10-12	Peões Poliedros Ouri	Hex Semáforo Ouri	Hex Semáforo Ouri	Hex Semáforo Ouri
12-15	Amazonas Peões Ouri	Amazonas Hex Ouri	Amazonas Hex Ouri	Amazonas Hex Ouri
15-18	Amazonas Hex Peões	Amazonas Hex Peões	Amazonas Hex Peões	Amazonas Hex Peões

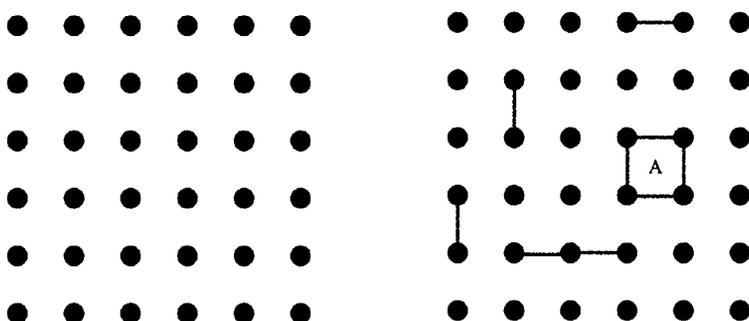
A distribuição dos jogos

Pontos & Quadrados é o conhecido jogo infantil estudado em (Berlekamp 2000). Verifica-se, com surpresa, que este jogo é extremamente profundo (no sentido que demos a este termo acima) e tem muitas ligações matemáticas não triviais.

Começamos com uma grelha de pontos.

Dois jogadores, alternadamente, ligam dois pontos ortogonalmente vizinhos. Quando um jogador completa um quadrado unitário, traçando o seu quarto lado, marca-o com a sua inicial e volta a jogar.

No final, quando todos os segmentos possíveis tiverem sido traçados, ganha quem tiver fechado mais quadrados.



Pontos & Quadrados: o início

Após algumas jogadas. O jogador A já fechou um quadrado

Poliedros é um jogo inventado pelo matemático português Jorge Rezende (Rezende 2011). Podemos vê-lo como uma versão glorificada do dominó. O objetivo consiste em montar um sólido platónico de modo a que os números das arestas coincidam.



Uma jogadora de Poliedros

Ouri é um elemento da família dos Mancala. Este é popular em Cabo Verde. Em Portugal, temos uma grande comunidade de estudantes cujas famílias são originárias de África. A presença deste jogo no Campeonato ajudou na integração social destes alunos, a vários níveis.



Jogadores de Ouri

O Jogo Semáforo é uma generalização do Jogo do Galo que surpreendeu até o seu criador, Alan Parr (Cornellius & Parr, 1991). É muito fácil aprender este jogo, mas é muito difícil jogá-lo bem. Mais uma vez, surgiram algumas ligações inesperadas com a matemática superior. O Semáforo é um dos jogos matemáticos mais populares em Portugal.

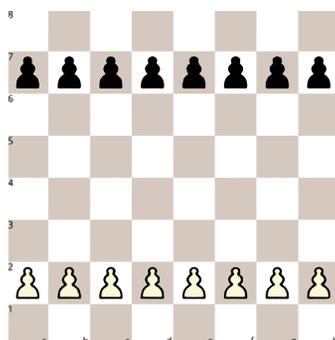
As regras garantem que não é possível terminar um jogo com um empate



Jogadores de Semáforo

Num tabuleiro de dimensões 3 por 4, os jogadores colocam, alternadamente, uma peça colorida numa célula. Há peças verdes, amarelas e vermelhas. É legal colocar uma nova peça verde no tabuleiro, ou transformar uma peça verde numa amarela, ou uma amarela numa vermelha. As peças vermelhas não podem mudar mais. O vencedor é o jogador que produzir um três-em-linha, em qualquer cor (ortogonal ou diagonalmente). As regras garantem que não é possível terminar um jogo com um empate.

Peões, inventado por Bill Taylor, é um minijogo de xadrez em que os jogadores comandam somente os seus peões e tentam promover um deles. Muito tático, este jogo é utilizado em vários contextos como dispositivo pedagógico para introduzir algumas estratégias de jogo.



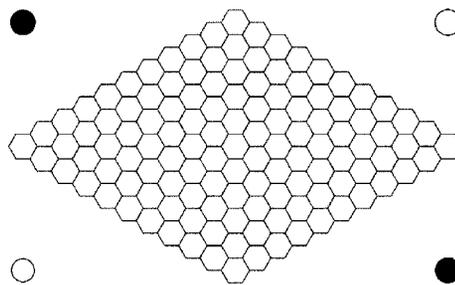
Posição inicial em Peões

Cada lado tem uma linha de peões. Os peões movem-se como no xadrez, ou seja, o peão avança uma casa (opcionalmente duas casas na sua primeira jogada) e captura na diagonal uma casa para a frente, substituindo a peça do adversário. As Brancas jogam primeiro. O primeiro jogador a chegar ao outro lado do tabuleiro é o vencedor. Também ganha se for a vez do seu adversário e este não tiver mais jogadas legais.

O Hex é o jogo de conexão mais famoso alguma vez inventado. Foi criado por Piet Hein, em 1942, e mais tarde reinventado por John Nash, em 1948. Popularizado por Martin Gardner nas páginas da *Scientific American*, tornou-se um clássico. O Hex tem regras extremamente simples e uma grande complexidade de jogo. As suas ligações com a matemática superior foram identificadas por David Gale (Gale, 1979) que provou que a ausência de empates num jogo de Hex, que é fácil de provar, é logicamente equivalente ao Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, um resultado do campo da Topologia. Nenhuma destas ligações matemáticas interfere com o jogo em si, mas mostram como estas ligações são profundas e misteriosas.

O Hex é jogado numa grelha rômbrica de hexágonos, normalmente de dimensões 11x11, embora também sejam possíveis outros tamanhos. Cada jogador tem uma cor atribuída, convencionalmente preto e branco. A cada jogador são também atribuídos dois lados opostos do tabuleiro (SE-NO, SO-NE). Os hexágonos em cada um dos quatro cantos pertencem a ambos os bordos adjacentes do tabuleiro. Na imagem acima, as peças presentes lembram aos jogadores a propriedade das margens do tabuleiro.

Os jogadores colocam, à vez, uma pedra da sua cor numa célula do tabuleiro. A convenção mais comum é a de que as Pretas jogam primeiro. Uma vez colocadas, as pedras não podem ser movidas, substituídas ou removidas do tabuleiro. O objetivo de cada jogador é formar um caminho conexo com as suas próprias pedras, ligando as suas duas margens do tabuleiro. O jogador que completar essa ligação ganha o jogo. Para compensar a vantagem do primeiro jogador, é normalmente utilizada a regra de troca (também chamada regra do equilíbrio). Esta regra permite que o segundo jogador, na sua primeira jogada, escolha se quer trocar de posição com o primeiro jogador após este ter efetuado a sua primeira jogada.



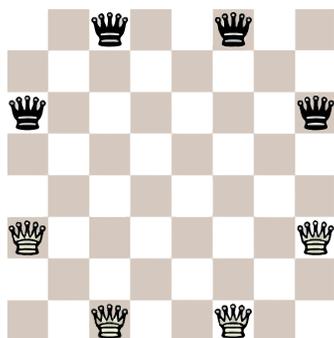
Tabuleiro de Hex

Amazonas, inventado por Walter Zamkuskas, em 1988, é jogado com quatro rainhas de cada lado num tabuleiro de xadrez (originalmente, num tabuleiro de 10x10). O mecanismo do jogo - as peças movem-se como rainhas e queimam células do tabuleiro seguindo os mesmos movimentos - garante combates interessantes e localizados, inseridos num contexto estratégico alargado. Amazonas foi analisado com técnicas da Teoria dos Jogos Combinatórios e revelou ter uma grande complexidade matemática (Berlekamp 2000).

Este é um jogo abstrato de território. São necessárias quatro rainhas de ambas as cores e 56 marcadores. Cada jogador começa com quatro amazonas (que se movem como as rainhas de xadrez, mas não capturam) colocadas em posições pré-determinadas no seu lado do tabuleiro. As Brancas jogam primeiro. Cada jogada é composta por duas partes. Primeira, move-se uma amazona exatamente como uma rainha se move no xadrez; não pode atravessar ou entrar numa casa ocupada por uma amazona de qualquer cor ou por um marcador. Segunda, depois de se mover, a amazona dispara uma seta da sua casa de aterragem para

Amazonas foi analisado com técnicas da Teoria dos Jogos Combinatórios e revelou ter uma grande complexidade

outra casa, usando outro movimento semelhante ao da rainha. Esta seta pode viajar em qualquer direção ortogonal ou diagonal (mesmo para trás, ao longo do mesmo caminho que a amazona acabou de percorrer, para dentro ou através da casa inicial, se desejado). Uma seta, tal como uma amazona, não pode atravessar ou entrar numa casa onde tenha caído outra seta ou onde esteja uma amazona de qualquer cor. O quadrado onde a seta aterra é então assinalado com um marcador para mostrar que já não pode ser usado. O último jogador que conseguir fazer uma jogada ganha.



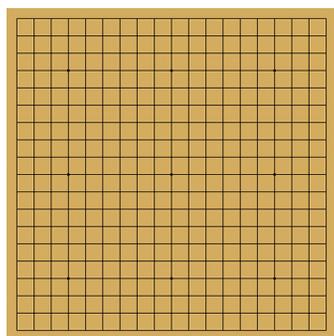
Posição inicial do Amazonas

Go, o jogo tradicional chinês, é considerado por muitos como o melhor jogo abstrato alguma vez inventado. Emanuel Lasker, campeão mundial de xadrez, de 1894 a 1921, mas também um entusiasta do Go, escreveu:

Enquanto as regras barrocas do xadrez só poderiam ter sido criadas por humanos, as regras do Go são tão elegantes, orgânicas e rigorosamente lógicas que, se existirem formas de vida inteligentes noutros locais do universo, é quase certo que joguem Go (Lasker 2012).

A dimensão do tabuleiro que usamos no nosso campeonato é de 9x9. O jogo já é muito complexo e rico num tabuleiro tão pequeno. As regras estão resumidas aqui, mas alguns conceitos podem necessitar de esclarecimento para os leitores que nunca tiveram contacto com o Go.

O tabuleiro está vazio no início do jogo. As Pretas fazem a primeira jogada, após o que as Brancas e as Pretas alternam. Uma jogada consiste em colocar uma pedra da sua própria cor numa interseção vazia do tabuleiro. Um jogador pode passar a sua vez em qualquer altura. Uma pedra ou grupo de pedras solidamente ligadas de uma cor é capturada e removida do tabuleiro quando todas as interseções diretamente adjacentes são ocupadas pelo inimigo (a captura do inimigo tem precedência sobre a auto captura). Nenhuma pedra pode ser jogada de forma a recriar uma posição anterior no tabuleiro. Duas passagens consecutivas terminam o jogo. A área de um jogador consiste em todos os pontos que o jogador ocupou ou cercou. O jogador com mais área ganha. Estas regras baseiam-se no senso comum para tornar precisas noções como "grupo ligado" e "cercar".



Tabuleiro tradicional de Go (19x19)

O Rastros, inventado por Bill Taylor, em 1992, era originalmente jogado num tabuleiro rômboico. No nosso campeonato, utilizamos um tabuleiro quadrado 7x7. Dois jogadores movem alternadamente a mesma peça, com objetivos diferentes. A vitória é obtida ao atingir uma célula especial do tabuleiro ou ao impedir o adversário de jogar, por o deixar sem quaisquer lances legais. Para ganhar o jogo, um jogador deve seguir linhas estratégicas claras e ultrapassar lutas táticas localizadas.

O Rastros é um jogo para dois jogadores, com uma única peça, jogado numa grelha. Os jogadores jogam à vez movendo a mesma peça, que pode mover-se para qualquer casa vizinha - tal como o Rei no Xadrez. É proibido visitar uma casa duas vezes. Coloca-se um marcador em cada casa em que a peça pousou para manter o registo das casas visitadas. O nome do jogo refere-se a um caracol que deixa um rasto de baba, denotado pela sequência de marcadores. O objetivo é atingir as respetivas casas alvo em a1 (marcada com um 1) e h8 (marcada com um 2). O primeiro jogador (ou seja, o jogador que inicia o jogo) ganha se a peça chegar a a1.

O segundo jogador ganha se a peça chegar a h8. Não importa qual o jogador que coloca a peça na casa de destino. Um jogador também ganha se o adversário não conseguir efetuar uma jogada legal.

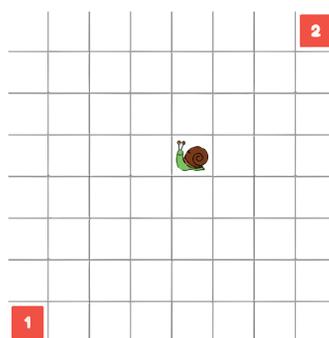
A nossa seleção de jogos mudou com o tempo. Seleccionamos sempre seis jogos que oferecem uma experiência lúdica, ampla e sofisticada. Em cada ano, os seis jogos propostos são diversos no que diz respeito aos seus ludemas (Parlett 2023, Browne 2019 e Digital Ludeme Project⁶), permitindo que os alunos escolham o que mais lhes agrada.

Implementámos também um interessante concurso paralelo, denominado *Inventa o teu Jogo*, em que os alunos são convidados a conceber novos jogos abstratos. Há prémios para os melhores jogos originais. Talvez no futuro um dos vencedores deste concurso encontre os seus jogos no Campeonato principal...

No nosso torneio, acolhemos jogadores com deficiências visuais. Utilizamos materiais adaptados para todos os jogos e atribuímos monitores dedicados aos respetivos participantes. Na sua primeira participação, CNJM5, os jogadores cegos jogavam apenas entre si, mas ultrapassámos essa situação a partir da seguinte edição do campeonato. Atualmente, todos os participantes jogam no mesmo torneio. O sucesso desta inclusão deve-se à Professora Carlota Brasileiro, que já faz parte da organização há muito tempo. Também integramos alunos surdos, graças a Laura Nunes e à sua equipa do Instituto Jacob Rodrigues.

A legislação relativa à Educação Inclusiva, interposta pelo Decreto-Lei n.º 54 de 6 de Julho de 2018, com a nova redação da Lei n.º 116 de 13 de Setembro de 2019, pressupõe o desenvolvimento de todas as crianças e jovens em estreita relação com os seus pares. Este desenvolvimento deve ocorrer num contexto educativo plural e cooperante, tal como plasmado no Decreto-Lei n.º 55 de 6 de Julho de 2018, para o desenvolvimento de uma autonomia/flexibilidade curricular. Atualmente, o papel do professor, para além de um perfil inclusivo, subentende uma articulação e trabalho colaborativo com os restantes elementos da comunidade educativa e com os seus pares (Brazileiro, 2018). A preparação dos alunos para a participação em competições de âmbito nacional, como o CNJM, fica ao encargo dos respetivos

O Rastros é um jogo para dois jogadores, com uma única peça, jogado numa grelha



Rastros. Posição inicial

⁶ <http://www.ludeme.eu/>

Em Portugal, a inclusão de jogadores com baixa visão e cegueira no Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos foi possível, pela primeira vez, com o jogo Semáforo de *layout* adaptado à baixa visão ou cegueira

envolver também os docentes de educação especial que acompanham os alunos diariamente no seu contexto escolar. O trabalho e envolvimento dos professores tem sido fundamental para o sucesso do CNJM.

A inclusão de jogadores com deficiência visual no CNJM foi possível através da criação de protótipos adaptados dos jogos em competição. Essas adaptações foram elaboradas por Dias (2012) e seguiram um conjunto de princípios ao nível da seleção de materiais e concessão dos tabuleiros que se resumem na tabela.

Cegueira	Baixa Visão
Cineticamente estático. Não são admitidas situações dinâmicas.	Cineticamente estático ou pouco dinâmico
O tamanho total, no máximo, deve caber nas duas mãos.	O tamanho deve permitir uma observação ao nível do campo visual, de forma a minimizar a exploração.
Todas as partes bem distintas ao tato (volumes, texturas e relevos).	Todas as partes distinguíveis através do uso da cor, do contraste, do brilho ou do fundo.
Resistente e estável de forma a não se alterar com a ação mecânica de exploração háptica, facultando ao aluno a exploração autónoma sem grandes cuidados.	Estar a uma distância acessível e oportuna, evitando explorações limitadas e complexas.
Posição adequada, procurando a simetria em relação ao plano vertical.	Posição e iluminação adequadas, conforme as características da baixa visão.

Tabela 2. Qualidades que o material manipulável adaptado à baixa visão e cegueira deve reunir. Adaptado de Campo (1986)

Em Portugal, a inclusão de jogadores com baixa visão e cegueira no Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos foi possível, pela primeira vez, com o jogo Semáforo de *layout* adaptado à baixa visão ou cegueira. O Jogo Semáforo foi um marco inclusivo no CNJM, na sua 5.^a Edição, em 2008/2009, na Covilhã. Neste dia, participaram pela primeira vez jogadores cegos e com baixa visão. Estes alunos foram integrados na final, jogando entre si e o vencedor jogou com o vencedor, normovisual, do Jogo Semáforo.



Alunos com baixa visão e cegueira na final do 5.^o CNJM - Jogo Semáforo

Na 6.^a Edição do CNJM, em 2009/2010, a inclusão dos jogadores com baixa visão e cegueira ocorreu em pleno. Desde esta edição até aos dias de hoje, existe um modelo de jogo adaptado à baixa visão e cegueira para cada ciclo de ensino, permitindo a inclusão alunos de qualquer nível de ensino. O CNJM, através da utilização dos jogos adaptados, tornou-se numa competição verdadeiramente inclusiva, permitindo que cada jogador com problemas de visão dispute as partidas nos torneios, de forma equitativa, com os seus pares.

No Jogo Semáforo existem oito peças verdes, oito amarelas e oito vermelhas. No entanto, o jogo adaptado, criado por Dias (2012), é constituído por oito peças circulares, oito peças triangulares e oito peças quadradas, respetivamente, partilhadas pelos jogadores. As dimensões do tabuleiro são 350mm x 250mm, tanto para a baixa visão, como para a cegueira. O objetivo do jogo é ser o primeiro a conseguir uma linha de três peças consecutivas com a mesma forma (cor) horizontal, vertical ou obliquamente.

Em cada jogada, os jogadores efetuam uma das seguintes ações: colocar uma peça circular (verde no jogo original) num quadrado vazio; substituir uma peça circular (verde) por uma peça triangular (amarela) ou substituir uma peça triangular (amarela) por uma peça quadrada (vermelha). As peças quadradas (vermelhas) não podem ser substituídas, isto significa que o jogo termina sempre, uma vez que à medida que o tabuleiro fica com peças quadradas (vermelhas), é inevitável que surja uma linha de três peças iguais.

As crianças com baixa visão apresentam dificuldades diferentes das crianças com cegueira, pelo que foram criados dois protótipos de jogo diferentes (Dias, 2012).



Tabuleiro adaptado à baixa visão do Jogo Semáforo

Tabuleiro adaptado do Semáforo

O tabuleiro de jogo para as crianças com baixa visão deverá ter o fundo escuro e as peças devem ser em madeira clara, para permitir um maior contraste e, por conseguinte, uma melhor e mais rápida identificação das situações de jogo. Quando se pretende indicar um lance, revela-se essencial a introdução de um processo que permita a sua identificação inequívoca. No caso particular do Jogo Semáforo, Brasileiro (2021) defende que a prática deste jogo matemático permitiu o desenvolvimento da comunicação e dos conhecimentos ao nível da identificação de coordenadas no plano. O aluno deve ter a oportunidade de comunicar nos diversos contextos, utilizando a linguagem, o desenho, a música, a dramatização, o jogo, entre outros. Este foi um exemplo da utilização de um jogo para a promoção da comunicação matemática de alunos com cegueira e os seus respetivos pares.

Este jogo permitiu, ainda, observar a dificuldade que os alunos cegos têm na identificação de sequências oblíquas (Dias, 2012). Esta conclusão foi reforçada na resolução das situações problemáticas, apresentadas na fase intermédia/avançada da prática do jogo Semáforo, onde o desempenho dos alunos, na identificação de posições vencedoras oblíquas, foi amplamente superado pelo reconhecimento de posições vencedoras verticais e horizontais. Esta conclusão é corroborada por Ammar (2006), dado que aquando do estudo da eficácia da implementação do programa Tactos, para estudo de objetos gráficos no domínio da matemática, verificou a existência de uma maior dificuldade na reprodução de retas oblíquas (com 45°) do que retas verticais e/ou horizontais. Uma outra possível justificação para a não identificação do padrão vencedor oblíquo no jogo Semáforo, apontada por Oliveira (2010), consiste

O CNJM, através da utilização dos jogos adaptados, tornou-se numa competição verdadeiramente inclusiva, permitindo que cada jogador com problemas de visão dispute as partidas nos torneios, de forma equitativa, com os seus pares

no facto de existir um trabalho continuado durante a aprendizagem da escrita e da leitura braille, exigindo-se uma movimentação na horizontal e na vertical, em detrimento dos movimentos oblíquos. Os alunos com baixa visão severa e com cegueira trabalham a escrita braille de forma continuada, o que poderá contribuir para dificuldade na identificação de situações de jogo não ortogonais.

O Jogo Rastros utilizado no Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos é a variante de tabuleiro quadrado com sete linhas e sete colunas. Trata-se de um jogo abstrato posicional, em que cada casa por onde passa a única peça que é possível movimentar deixa de estar disponível. As partidas são rápidas, porque a possibilidade de movimento diminui a cada nova jogada.

Os protótipos adaptados à baixa visão e cegueira foram construídos em madeira, por ser um material resistente e agradável ao toque. Segundo Criado (1999), o material utilizado nos jogos pode interferir na função lúdica, pelo que a sua



Tabuleiro do jogo Rastros adaptado à cegueira

complexidade não deve exceder a aptidão da criança, ou seja, deve estar de acordo com a faixa etária para a qual é criado o jogo ou a atividade lúdica. O objetivo do jogo Rastros é colocar a peça quadrada (preta) na sua casa final ou, então, bloquear o adversário, impedindo-o de jogar.

O material consiste num tabuleiro 7x7, uma peça quadrada forrada com velcro (preta) e cerca de quarenta peças circulares (brancas). O jogo começa com a peça quadrada (coberta de velcro preto) na casa e5; cada jogador, na sua vez, desloca a peça quadrada para um quadrado vazio adjacente (vertical, horizontal ou diagonalmente); a casa onde se encontrava a peça quadrada, recebe uma peça circular; as casas que recebem peças circulares não podem ser ocupadas pela peça quadrada. É importante notar que mesmo que seja o adversário a mover a peça para a casa final do jogador, o jogo termina com a vitória do jogador.

Existem dois tipos principais de protótipos adaptados que diferem, essencialmente, ao nível das dimensões. O protótipo de dimensões mais reduzidas é o preferido pelos alunos com baixa visão (Dias, 2012). As peças têm formas diferentes (uma peça quadrada forrada com velcro preto e cerca de quarenta peças circulares em madeira clara). Os alunos considerados cegos legais apenas jogam no protótipo de maiores dimensões, cujo contraste entre a textura e a forma das peças é fundamental. Os tabuleiros de jogo apresentam uma textura diferente no quadrado e5 e as indicações das casas do jogador Um (a1) e do jogador Dois (g7) são mencionadas em *braille*.

O tabuleiro do jogo Rastros adaptado à baixa visão tem dimensões menores do que o tabuleiro adaptado à cegueira. No entanto, a forma e cobertura das peças mantém-se nos dois protótipos. O tabuleiro adaptado à baixa visão tem dimensões 240mm x 240mm, e as peças circulares têm 20mm de diâmetro; o tabuleiro adaptado à cegueira tem dimensões 300mm x 300mm e as peças circulares medem 30mm de diâmetro. Sempre que se pretender dar uma indicação de um lance, utilizam-se as coordenadas algébricas.

O Rastros tem características que facilitam uma melhor performance de jogo dos alunos com cegueira. Este jogo, em cada lance, permite observar de forma inequívoca qual foi a jogada efetuada pelo adversário, o que facilita a definição de uma estratégia de jogo. Na edição do 9CNJM que decorreu na Arena d'Évora, em 2012/2013, um aluno com cegueira legal obteve um 13.º lugar a nível nacional. Após a adaptação dos protótipos destes jogos, Dias (2012) concretizou um estudo para analisar quais as competências matemáticas que os jogadores cegos e com baixa visão desenvolviam com a prática dos jogos matemáticos. O estudo permitiu verificar não só uma melhoria ao nível da visualização espacial, como também uma tomada de decisão mais coerente com o objetivo do jogador, reveladora de uma melhoria ao nível do raciocínio (Dias, 2012). Existem outros estudos que atestam que a aprendizagem de um jogo, para além do respeito pelas regras, da cooperação entre jogadores e da partilha de regras e objetivos, envolve a planificação de estratégias de resolução de problemas e um conjunto de raciocínios (Macedo, Petty & Passos, 2007).



Aluno cego a jogar com os seus pares uma partida de jogo Rastros na final do 16CNJM, em Aveiro, (2022/2023)

No início de cada ano letivo, os organizadores - Associação Ludus, Sociedade Portuguesa de Matemática e Associação de Professores de Matemática - anunciam a próxima edição do Campeonato, nomeadamente o local da final e os jogos que nela participarão. É criada uma página na Internet para o evento. É formado um comité organizador nacional com representantes das três instituições. Esta comissão certifica-se de que as regras dos jogos chegam às escolas de todo o país e que os materiais necessários são fornecidos ou bem descritos na página *web*.

Várias sessões de formação de professores têm lugar nas escolas, para que estas possam induzir a prática dos jogos e familiarizar-se com os métodos de seleção. Um problema comum é a organização de torneios locais para selecionar os representantes das escolas. Cada escola pode levar à final um jogador por cada combinação grupo etário/jogo, pelo que podem selecionar um máximo de 12 jogadores. O método suíço⁷ é apresentado, para que os professores aprendam a aplicá-lo, tanto manualmente como através de software. A final é organizada segundo o mesmo método. Esta é uma parte importante da organização, uma vez que o método permite lidar com um grande número de jogadores que participam no mesmo número de jogos, mantendo este número muito controlável (da ordem de grandeza do logaritmo binário do número de jogadores). Os alunos com baixa visão e cegueira, no dia de cada final, são acompanhados por monitores especializados que os acompanham e auxiliam na orientação espacial durante as partidas. Estes monitores recebem, previamente, formação no domínio da orientação e mobilidade de forma a estarem aptos a acompanhar os alunos com deficiência visual durante todo o dia, incluindo durante as refeições.

⁷ https://en.wikipedia.org/wiki/Swiss-system_tournament

A final

O dia da final é o pico da emoção que todos esperam. Cada escola que se inscreve no campeonato pode apresentar doze jogadores, três por cada grupo etário/jogo combinado. Há três jogos para cada grupo etário e há quatro grupos etários. Aos jogadores juntam-se os professores das suas escolas e, naturalmente, familiares e alguns apoiantes.

Organizamos a final em dois momentos principais. De manhã, selecionamos os melhores jogadores, que competirão entre si durante a tarde. Como utilizamos o sistema suíço, é fácil formar grupos de 12 jogadores do mesmo género (mesmo grupo etário e jogo). Cada grupo de 12 jogadores joga um torneio para selecionar um jogador para a sessão da tarde. Não é necessário começar todos os jogos à mesma hora, o que é muito conveniente, uma vez que as escolas chegam, algumas de longe, a horas diferentes. Normalmente, temos cerca de 1500 a 2000 jogadores.

Durante a tarde, o número de torneios é muito menor e mais fácil de gerir. Quando o último jogo tiver sido disputado e os vencedores tiverem sido determinados, realiza-se uma cerimónia de distribuição de prémios. Normalmente, as autoridades locais e nacionais fazem pequenos discursos para os jogadores, professores, membros da organização e todos os outros presentes. O Ministro da Ciência está sempre presente ou representado. O falecido Ministro Mariano Gago (1948-2015) era uma presença familiar, pois compreendia bem as virtudes e os benefícios associados à prática de jogos abstratos. Como ele disse uma vez, “Os jogos matemáticos são as atividades práticas da matemática pura.”



Camisolas coloridas facilitam a organização dos diversos torneios da final

Durante o dia, a comissão organizadora local propõe várias atividades para os adultos presentes e para os jogadores que não participam na sessão da tarde. Muitas vezes, estas são variadas e muito apreciadas (circo, visitas a laboratórios e outras estruturas académicas, teatro, dança, etc.).



Uma final do CNJM

A prática de jogos em contexto educativo

A prática de jogos em contexto educativo tem vindo a ser utilizada pelos docentes, ao longo de décadas, na medida em que constitui uma fonte de motivação dos alunos para a aprendizagem. No entanto, o recurso a jogos de estratégia, em particular, foi incentivado pelo próprio currículo do 1.º ciclo do ensino básico, que já em 1998 referia especificamente a utilização de jogos, como os jogos de cartas, xadrez, damas, *mastermind* e dominó, para trabalhar a resolução de problemas. Esta ideia tinha como pressuposto que a prática de jogos de estratégia levantava questões que poderiam constituir verdadeiros problemas para os alunos daquela facha etária. Posteriormente, as competências gerais e essenciais para o ensino básico, de 2001, confirmam esta vontade de manter no currículo a referência a jogos de estratégia como agentes facilitadores do desenvolvimento de capacidades matemáticas, nomeadamente referindo a vantagem de, em contexto de jogo, se conseguir que os alunos desenvolvam processos de raciocínio, estratégia e reflexão muito ricos.

Estas referências curriculares conduziram à realização de investigações, onde se procurou aferir se a prática de jogos de estratégia promovia ou não o desenvolvimento de capacidades matemáticas, como a resolução de problemas e a identificação de padrões (Ferreira, 2013). Para o desenvolvimento da investigação, Ferreira (2013) trabalhou com alunos do 3.º e 4.º ano de escolaridade os jogos Ouri, Semáforo, Pontos e Quadrados e Gatos & Cães e aplicou um teste, previamente validado para a respetiva amostra, que mede a capacidade de identificar padrões. Também analisou a relação entre a prática dos jogos e a avaliação escolar a matemática, medida através dos resultados obtidos nas provas de aferição dos alunos do 4.º ano de escolaridade.

A metodologia pedagógica consistia no ensino das regras de jogo aos alunos e professores, seguia-se o esclarecimento de dúvidas e passava-se a um momento de exploração de algumas situações de jogo. Posteriormente, os alunos praticavam o jogo, onde havia espaço para a clarificação das regras e garantir, dessa forma, o seu cumprimento por parte de ambos os jogadores. A etapa seguinte constituía a prática do jogo, que os alunos faziam semanalmente. Por fim, realizava-se um campeonato. Ao longo desta prática, realizada em diferentes escolas, sempre se verificou um grande entusiasmo por parte dos alunos, o que confirma a conceção de que os jogos são uma boa fonte de motivação. Os resultados da investigação revelaram que há diferenças entre os jogos analisados na sua relação com a capacidade de identificar padrões e que os jogos Semáforo



Alunos do 4.º ano a jogar Semáforo

e Ouri estão relacionados com a capacidade de identificar padrões. Analisando o grupo de melhores jogadores, verificou-se que os jogos Semáforo e Pontos e Quadrados apresentam relações específicas e diferenciadas entre a capacidade de jogar e a capacidade de identificar padrões, sendo essa relação mais forte para o jogo Semáforo. Ou seja, quanto melhor é o aluno a jogar Semáforo, melhor é a sua capacidade de identificar padrões. Em particular, jogar bem Semáforo está relacionado com padrões de repetição e jogar bem Ouri está relacionado com padrões que envolvem mais do que uma lei de formação. A capacidade de jogar estes dois jogos revelou também estar relacionada com a avaliação escolar a matemática, nomeadamente no que concerne a Números e Operações, Geometria e Medida e Álgebra e Funções, para o Semáforo. O jogo Ouri revelou ter relação com Geometria e Medida.

Quanto ao jogo Pontos e Quadrados, este revelou estar relacionado com o grupo de melhores jogadores, em particular com padrões que envolvem progressões numéricas e padrões que envolvem contagens.

A investigação apontou o jogo Semáforo como sendo o que apresenta maior consistência nos resultados, revelando ser um jogo adequado para ajudar os alunos a desenvolver a sua capacidade de identificar padrões. No entanto há jogos que revelaram relações com aspetos particulares da matemática, o que constitui um ponto de interesse, até para futuras investigações. Ao longo dos últimos anos, na preparação dos alunos para a presença na final do CNJM, as escolas incentivam a práticas dos jogos envolvidos nessa final. Para além deste aspeto motivador, os jogos podem ser utilizados como ponto de partida para abordar conceitos matemáticos em sala de aula, como por exemplo os múltiplos de seis, o sentido horário e anti-horário, adições e subtrações, com recurso ao jogo Ouri. Comum a todos os jogos matemáticos há um aspeto de grande importância, que consiste na capacidade de prever o resultado de uma ação em ações seguintes. Este aspeto é fundamental no desenvolvimento de capacidades matemáticas nos alunos. A título de exemplo, poderemos mencionar a previsão do resultado de fazer dois ou quatro quartos de volta, no sentido horário, num determinado itinerário, ou a previsão do resultado da adição de dois números ímpares e um número par.

Para finalizar podemos referir que muito haveria para dizer no respeitante à ligação dos jogos com a matemática, mesmo ao nível da matemática elementar, e dos benefícios que a prática de jogos matemáticos pode constituir para os alunos. Os professores podem aproveitar a motivação intrínseca proporcionada pelos jogos para fomentar aprendizagens mais significativas, em contexto de sala de aula.

Considerações finais

A organização do CNJM junta as principais instituições nacionais dedicadas à promoção da matemática, o que mostra que a bondade do projeto é reconhecida por todos. Todos os anos, desde 2004, as equipas dessas agremiações se dedicam a levar a bom termo a organização de um evento de grande dimensão, sem paralelo no sistema educativo português. Esperamos continuar e alargar a iniciativa a outros espaços, como os dos países de expressão oficial portuguesa (nos últimos anos, Cabo Verde tem-se feito representar com uma equipa de jogadores).

Em tempos caracterizados pelo império da superficialidade e pela volatilidade dos interesses dos jovens, nós conseguimos proporcionar uma experiência muito enriquecedora. Um novo campo para a racionalidade se abre aos nossos jovens. Há uma lição que todos aprendem com o CNJM: a vida do intelecto, das emoções, das partilhas culturais é multifacetada e pode ser muito apelativa. As atividades inerentes à participação no Campeonato, que os alunos desenvolvem de bom grado, estão longe de serem simples. O esforço intelectual é continuado e significativo. É possível levar os alunos a dedicarem-se a tarefas sofisticadas sem recurso nem ao pau, nem à cenoura. As comunidades estudantil e docente têm feito desta iniciativa um sucesso já de fama internacional. Bem hajam.

Há uma lição que todos aprendem com o CNJM: a vida do intelecto, das emoções, das partilhas culturais é multifacetada e pode ser muito apelativa

- Ammar, A. (2006). Analyse des explorations haptiques des formes pour la Conception d'un dispositif de suppléance perceptive dédié aux personnes aveugles. Universidade de Têcnologia de Compiègne, Compiègne, França. Retirado da World Wide Web em 10 de Outubro de 2023: <https://www.semanticscholar.org/paper/Analyse-des-explorations-haptiques-de-formes-pour-Ammar/8fb7d91af2d2a71084d6718e4a11e43c34b8b1e2>.
- Atkins, R., Foley, J., Loeffler, S., Silva, J.N., Szávin, M., 21 STRATEGY GAMES FOR THE CLASSROOM -- A Manual of Educational Games Playable on a Chessboard, Erasmus+ 2022. <https://shorturl.at/stzNP>.
- Bentley, N., "Redefining the Abstract". <https://shorturl.at/ckyG1>. Retrieved May 20, 2023.
- Berlekamp, E. (2000), *The Dots and Boxes Game: Sophisticated Child's Play*, AK Peters.
- Berlekamp, E. R. (2000a). "Sums of $N \times 2$ Amazons." *Lecture Notes-Monograph Series*, 35, 1-34. <http://www.jstor.org/stable/4356078>.
- Berlekamp, E., Conway, J., Guy, R. (2001-2004), *Winning Ways for your Mathematical Plays*, 4 vols. AK Peters.
- Brazileiro, C. (2018). "A inclusão da cegueira na aula de Matemática... O que necessitam os professores de saber?" *Educação e Matemática*. Revista da Associação de Professores de Matemática 146 (Janeiro, Fevereiro, Março) Lisboa: Colorpoint pp. 33-36.
- Brazileiro, C. (2021). "A comunicação Matemática na baixa visão e cegueira." *Educação e Matemática*. Revista da Associação de Professores de Matemática 159 (Janeiro, Fevereiro, Março) Lisboa: Colorpoint pp. 29-33
- Browne, C. (2000), *Hex Strategy: Making the Right Connections*, AK Peters.
- Browne, C. et al. (2019), "Foundations of Digital Archæoludology", arXiv:1905.13516v1 [cs.AI].
- Caillois, R. (1967), *Les Jeux et les Hommes - Le Masque et le Vertige*, Gallimard.
- Campo, J. (1986). *La Enseñanza de la Matemática a los Ciegos*. Madrid: ONCE.
- Cornelius, M., Parr, A. (1991), *What's your Game?* Cambridge University Press.
- Criado, G. (1999). *El Juego y el Desarrollo Infantil*. Barcelona: Octaedro, S.L.
- DEB (1998). *Organização Curricular e Programas: Ensino Básico - 1.º Ciclo*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.
- DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.
- Dias, C. (2012). *Jogos matemáticos adaptados à baixa visão e cegueira*. Dissertação de Doutoramento, Universidade do Minho, Braga, Portugal
- Dweck, C. (2007), *Mindset: The New Psychology of Success*, Random House.
- Ferreira, D., Palhares, P. & Silva, J. N. (2008). "Padrões e jogos matemáticos." *REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática* 6, V3.3, p. 30-40, UFSC.
- Ferreira, D., Palhares, P., & Silva, J. N. (2013). "Investigando a relação entre o jogo do Semáforo e os padrões." *Revista Lusófona de Educação*, (25), 73-93.
- Ferreira, D., Palhares, P., & Silva, J. N. (2014). "A Perspective on Games and Patterns." In *K-12 Education: Concepts, Methodologies, Tools, and Applications* (3 Volumes), 14 (pp. 247-267. USA: IGI Global.
- Ferreira, M.D.P (2013). *Jogos Matemáticos e Matemática Elementar*. [Tese de doutoramento, Universidade do Minho].
- Foley, John (2020), "15 research reports into chess and education", <https://chessplus.net/research/10-research-reports-into-chess-and-education/>
- Gale, D. (1979). "The Game of Hex and the Brouwer Fixed-Point Theorem." *The American Mathematical Monthly*, 86(10), 818-827. <https://doi.org/10.2307/2320146>
- Huizinga, J. (1955), *Homo Ludens: A Study of the Play-Element in Culture*, The Beacon Press.
- Lasker, E. (2012), *Go and Go-Moku*, Dover.
- Macedo, L., Petty, A. & Passos, N. (2007). *Os Jogos e o Lúdico na Aprendizagem Escolar* (2ª. ed.). Porto Alegre: Artmed Editora, SA.
- Neto, J.P., Silva, J.N. (2013), *Mathematical Games, Abstract Games*, Dover
- Oliveira, H. (2010). *Introdução ao Conceito de Função para Deficientes Visuais com o Auxílio do Computador*. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro. Retirado da World Wide Web em 10 de Outubro de 2023: https://pemat.im.ufrj.br/images/Documents/Disserta%C3%A7%C3%B5es/2010/MSc_20_Heitor_Barbosa_Lima_de_Oliveira.pdf
- Parlett, D. (2023), "What is a Ludeme?" <https://www.parlettgames.uk/gamester/whatsaludeme.html>
- Rezende, J., "Periodical plane puzzles with numbers", arXiv 2011. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1106.0953>
- Silva, J.N. et al. (2009), "Jogos matemáticos, a Portuguese project", in Proceedings of the Board Game Studies Colloquium XI, Jorge Nuno Silva (Ed.), Ludus 2009, ISBN 978-989-958-785-4, pp. 19-25
- Silva, J.N. et al. (2011), "Mathematical Skills and Mathematical Games", in Proceedings of the Recreational Mathematics Colloquium I, Jorge Nuno Silva (Ed.), Ludus 2011 pp. 89-94.
- Silva, J.N. et al. (2011), "Mathematical Games for the Blind", in Proceedings of the Recreational Mathematics Colloquium I, Jorge Nuno Silva (Ed.), Ludus 2011, pp. 69-72.
- "Silva, J.N. et al. (2012), "The ability to play games and its connection with pattern recognition", Of Boards and Men: Board Games Investigated, Proceedings of the XIII Board Game Studies Colloquium.
- Silva, J.N. et al. (2013), "Good properties of combinatorial rulesets: some consequences", *Proceedings of the Recreational Mathematics Colloquium III*, Ludus 2013, pp. 41-53.
- Suits, B. (2005), *The Grasshopper - Games, Life and Utopia*. Broadview Press.
- Thompson, J.M., "Defining the Abstract", *The Games Journal*, July 2000.
- Wells, D. (2012), *Games and Mathematics: Subtle Connections*, Cambridge University Press.